Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°5

Exercice 1 (algorithme de Héron)

1. $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{17}{12}$, $u_3 = \dfrac{577}{408}$.
2. On procède par récurrence en remarquant que $f([\sqrt{2}; +\infty[) = [\sqrt{2}; +\infty[$ où $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$.
3. On procède par récurrence en remarquant que $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ avec f croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et décroissante donc converge vers $l \geqslant 0$ avec $l = \dfrac{l^2+2}{2l}$.

Exercice 2 (dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$)

1. On procède par récurrence en posant $P_{n+1}(x) = P_n(x) + P_n'(x)$.
2. (a) $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = b_n + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $a_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On montre par récurrence que $b_n = n(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (développement en série de la fonction exponentielle)

1. La fonction u_n est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $u_n'(x) = u_n(x) - \dfrac{x^n}{n!}$
2. On remarque que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ car $f'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$, elle admet pour maximum $f(0) = 1$.
3. On remarque que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car $g'(x) = \dfrac{x^n}{n!}(1-e^{-x})$, elle admet pour minimum $f(0) = 1$.
4. On en déduit que $\left(1 - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) e^x \leqslant u_n(x) \leqslant e^x$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = e^x$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

Exercice 4 (polynômes de Faulhaber)

1. (a) $F_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$
   (b) $F_3(X) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$.
2. (a) On remarque que $k^p = F_{p+1}(k+1) - F_{p+1}(k)$.
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = F_2(n+1) - F_2(0) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = F_3(n+1) - F_3(0) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.
3. (a) $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.
   (b) On a $Q(X+1) = Q(X)$ et par récurrence $Q(a) = Q(0) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{N}$, le polynôme Q est donc nul car il admet une infinité de racines.
   (c) On remarque que si P est une primitive d'un polynôme de Faulhaber F_p de degré p on a $P(X+1) - P(X) = \frac{1}{p}X^p + c$ et on pose $F_{p+1}(X) = \frac{1}{p}(P(X) + cX)$.